エクマン理論

前節までは非粘性の仮定のもとに、与えられた擾乱の振る舞いを調べた。ここでは粘性流体について考える。密度が一様で、無限に深く、かつ広い海を仮定しよう。また現象は水平方向に一様で、海表面を z=0 で鉛直上向きを正とおく。ここで y 方向にのみ風応力を与える。先ず、この風応力に駆動される以下のようなシステムについて考えよう。

$$fv+\nu\frac{d^2u}{dz^2}=0 \quad \cdots(1)$$

$$-fu++\nu\frac{d^2v}{dz^2}=0 \quad \cdots(2)$$

ここで ν は鉛直渦動粘性係数である。境界条件として海面(z=0)で

$$\nu\frac{dv}{dz}=\frac{\tau^s}{\rho} \quad \cdots(3)$$

$$\nu\frac{du}{dz}=0 \quad \cdots(4)$$

また、無限深($z\to-\infty$)で風応力の影響は消滅するものと考えて

$$u=v=0 \quad \cdots(5)$$

とおく。 τ^s は海面風応力を示す。ここで、$V=u+iv$ を定義して(1)+(2)×i をとると、

$$(D^2-\frac{f}{\nu}i)V=0 \quad ,D^2=\frac{d^2}{dz^2} \quad \cdots(6)$$

となる。境界条件(5)を考慮して、これを解くと、

$$V=ce^{(1+i)z/\delta} \quad \cdots(7)$$

$$\delta=\sqrt{\frac{2\nu}{f}}$$

ここで c は定数。c を求めるため、(4)+(3)×i をとると

$$\frac{dV}{dz}=i\frac{\tau^s}{\rho\nu} \quad ,z=0 \quad \cdots(8)$$

(7)を z 方向に微分して(8)に代入すると、

$$c=\frac{(1+i)\tau^s\delta}{2\rho\nu} \quad \cdots(9)$$

(9)を(7)に代入して変形すると

$$V=\frac{\delta\tau^s}{\sqrt{2}\rho\nu}e^{z/\delta}\left\{-\sin\left(\frac{z}{\delta}-\frac{\pi}{4}\right)+i\cos\left(\frac{z}{\delta}-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad \cdots(10)$$

を得る。V の定義より、

$$\left.\begin{aligned} u &= -V_s e^{z/\delta} \sin\left(\frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \\ v &= V_s e^{z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}\right\} \quad \cdots(11)$$

ここで V_s は海表面(*z*=0)流速で(10)に示した通り。(11)は、海表面流速と風応力の方向が 45°だけ右方向にすれていることを、また深くなるにつれて流速の向きがらせん状に変わっていくことを示している。この流速を(表層)エクマン流([*surface*] *Ekman flow*)、流速のらせん構造をエクマンらせん(*Ekman spiral*)と呼ぶ。また流速が海表面の e^{-1} になる深さ *z*=－δをエクマン深度(*Ekman depth*)、z=0～δを(表層)エクマン層([*surface*] *Ekman layer*)という。また境界条件(3),(4)を考慮しつつ、(1),(2)を無限深 z→－∞ から海表面 z=0 で積分することで、エクマン流の鉛直積分流量(*Ue*,*Ve*)を得る。すなわち、

$$Ue = \frac{\tau^s}{f\rho}, \quad Ve = 0 \quad \cdots(12)$$

(12)に示すように、体積輸送は風応力に対して直角右向きにのみ生じる。この輸送をエクマン輸送(*Ekman transport*)と呼ぶ。