

## コリオリ力の導出

●回転座標系の  $x$  方向の単位ベクトル  $i$  と、 $y$  方向の単位ベクトル  $j$  は、絶対座標系の単位ベクトル  $I$  と  $J$  を用いると、以下のように表現できる。

$$i = I \cos(\Omega t) + J \sin(\Omega t) \quad \dots(1)$$

$$j = (-I \sin(\Omega t) + J \cos(\Omega t))$$

●同様に、回転座標系の位置  $x$  と  $y$  は、絶対座標系の位置  $X$  と  $Y$  を用いて、以下のように表現できる。

$$x = X \cos(\Omega t) + Y \sin(\Omega t) \quad \dots(2)$$

$$y = (-X \sin(\Omega t) + Y \cos(\Omega t))$$

●ちなみに、(1)を変形すると、絶対座標系の単位ベクトルは回転座標系の単位ベクトルによって、以下のように表現できる。

$$I = i \cos(\Omega t) + (-j \sin(\Omega t)) \quad \dots(3)$$

$$J = (i \sin(\Omega t) + j \cos(\Omega t))$$

●回転座標系での  $x$  と  $y$  方向の速度を  $u$  と  $v$  で定義し、これらを(2)式を時間  $t$  で微分して求める。すなわち、

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dX}{dt} \cos(\Omega t) + \frac{dY}{dt} (\sin(\Omega t)) - \Omega X \sin(\Omega t) + (\Omega Y \cos(\Omega t)) \quad \dots(4)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = -\frac{dX}{dt} \sin(\Omega t) + \frac{dY}{dt} (\cos(\Omega t)) + (-\Omega X \cos(\Omega t)) - \Omega Y \sin(\Omega t)$$

●(4)式を時間  $t$  でもう一度微分して、回転座標系での  $x$  と  $y$  方向の加速度  $a$  と  $b$  を求めておく。

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \left[ \frac{d^2X}{dt^2} \cos(\Omega t) + \left( \frac{d^2Y}{dt^2} \sin(\Omega t) \right) \right] + 2\Omega \left[ -\frac{dX}{dt} \sin(\Omega t) + \left( \frac{dY}{dt} \cos(\Omega t) \right) \right] - \Omega^2 [X \cos(\Omega t) + (Y \sin(\Omega t))]$$

$$b = \frac{d^2y}{dt^2} = \left[ -\frac{d^2X}{dt^2} \sin(\Omega t) + \left( \frac{d^2Y}{dt^2} \cos(\Omega t) \right) \right] - 2\Omega \left[ \frac{dX}{dt} \cos(\Omega t) + \left( \frac{dY}{dt} \sin(\Omega t) \right) \right] - \Omega^2 [-X \sin(\Omega t) + (Y \cos(\Omega t))]$$

…(5)

●ここで、絶対座標系の加速度ベクトル  $\vec{A}$  に含まれる単位ベクトル  $I$  と  $J$  を、(3)を使って書き換えると、

$$\vec{A} = Ai + Bj = \left( \frac{d^2X}{dt^2} \cos(\Omega t) + \frac{d^2Y}{dt^2} \sin(\Omega t) \right) i + \left( -\frac{d^2X}{dt^2} \sin(\Omega t) + \frac{d^2Y}{dt^2} \cos(\Omega t) \right) j \quad \dots(6)$$

$A$  と  $B$  は回転座標系から見た加速度成分である。

●(6)式の( )内を(5)式を使って書き換える。ただし、(5)の右辺第二[ ]項は(2)式と(4)式を使って、右辺第三[ ]項は(2)式を使って、 $u, v, x, y$  だけで表現しておく。

$$A = a + (-2\Omega)v + (-\Omega^2)x \quad \dots(7)$$

$$B = b + (2\Omega)u - \Omega^2 y$$

(7)式の右辺は、回転座標系では、加速度  $a, b$  に、第二項のコリオリ力と第三項の遠心力が加わることを意味する。