水粒子の軌道

$$(\boldsymbol{x_0}-\boldsymbol{x})=\int\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dt}=\int-\frac{\boldsymbol{ga}}{\boldsymbol{\omega}}\frac{\cosh\boldsymbol{k}(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{h})}{\cosh\boldsymbol{kh}}(-\boldsymbol{k})\cos(\boldsymbol{\omega t}-\boldsymbol{kx})\boldsymbol{dt}$$

$$=\frac{\boldsymbol{gak}}{\boldsymbol{\omega}^2}\frac{\cosh\boldsymbol{k}(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{h})}{\cosh\boldsymbol{kh}}\sin(\boldsymbol{\omega t}-\boldsymbol{kx})$$

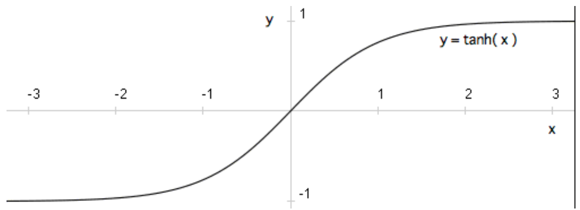
(2.24)より $\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{\omega}^2}=\frac{\cosh\boldsymbol{kh}}{\boldsymbol{k}\sinh\boldsymbol{kh}}$

$$=\boldsymbol{a}\frac{\cosh\boldsymbol{k}(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{h})}{\sinh\boldsymbol{kh}}\sin(\boldsymbol{\omega t}-\boldsymbol{kx})=\boldsymbol{A_x}(\boldsymbol{z})\sin(\boldsymbol{\omega t}-\boldsymbol{kx})$$

同様にして

$$(\boldsymbol{z_0}-\boldsymbol{z})=\int\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\boldsymbol{z}}\boldsymbol{dt}=\boldsymbol{a}\frac{\sinh\boldsymbol{k}(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{h})}{\sinh\boldsymbol{kh}}\cos(\boldsymbol{\omega t}-\boldsymbol{kx})=\boldsymbol{A_z}(\boldsymbol{z})\cos(\boldsymbol{\omega t}-\boldsymbol{kx})$$

よって $\frac{(\boldsymbol{x_0}-\boldsymbol{x})^2}{\boldsymbol{A_x^2}}+\frac{(\boldsymbol{z_0}-\boldsymbol{z})^2}{\boldsymbol{A_z^2}}=\boldsymbol{1}$



$\frac{\boldsymbol{A_z}}{\boldsymbol{A_x}}=\tanh\boldsymbol{kh}$ なので $h\rightarrow\infty$ で $A_z/A_x\rightarrow 1$ となり、円軌道

hが有限ならば、$A_z/A_x<1$となり、水平方向に扁平な楕円軌道

群速度がエネルギーの輸送速度になることを証明しなさい

$$\bar{W} = \frac{1}{T}\int_0^T \int_{-h}^0 -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial \phi}{\partial t} dzdt$$

上式に与えられた Φ を代入して

$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - kx)dt = \frac{1}{2}$ を利用すると

$$\bar{W} = \frac{\rho g^2 a^2 k}{2\omega \cosh^2 kh}\int_{-h}^0 \cosh^2 k(z+h)\, dz$$

$\int \cosh^2 x\, dx = \frac{1}{4}\sinh 2x + \frac{1}{2}$ を利用すると

$$\bar{W} = \frac{\rho g^2 a^2}{2\omega \cosh^2 kh}\left(\frac{1}{4}\sinh 2kh + \frac{1}{2}kh\right)$$

$\dfrac{\omega}{k} \equiv c$　を利用して　$\overline{W} = \dfrac{\rho g^2 a^2 kc}{2\omega^2 \cosh^2 kh}\left(\dfrac{1}{4}\sinh 2kh + \dfrac{1}{2}kh\right)$

分散関係式　$\dfrac{\omega^2}{g} = k \tanh kh$　を利用して一所懸命に変形すると

$\overline{W} = \dfrac{1}{4}\rho g a^2 c\left(1 + \dfrac{2kh}{\sinh 2kh}\right)$　を得る。